(Dienstag, 10.04.18)

1. Kap-itel (Ü-blätter 1-4)

$\mathbb{N} = \{1, 2 := 1+1, 3 := 1+1+1, \dots\}$

abzählbar unendlich, kein Körper (z.B $0 \notin \mathbb{N}$)

$\mathbb{Z} = \{\underbrace{\dots, -3, -2, -1}_{\text{Inversen bzgl Addition}}, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

0: das neutrale Element bzgl $+$

abzählbar unendlich, kein Körper (denn z.B $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, ggT(p,q) = 1\}$

abzählbar unendlich, archimedischer Körper (geordneter Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ und arch. Axiom), unvollständig (d.h. nicht jede Cauchy-Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist konvergent, d.h. $\lim_{n\to\infty} a(n) = A \notin \mathbb{Q}$)

$\mathbb{R} = \{A = [(a(n))_{n\in\mathbb{N}}] : a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ Cauchy-Folge, $\lim_{n\to\infty} a(n) = A\}$ → Menge aller Näherungen $A \approx a(n)$

unabzählbar unendlich, archimedischer Körper (Beweis siehe Skript T. Sauer Satz 3.32)

vollständig

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

unabzählbar unendlich, Körper (nicht geordnet), vollständig.

Vollständigkeit: Jede Cauchy-Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ist konvergent.

In $\mathbb{R}$: konvergent ist äquivalent zum Begriff der Cauchy-Folge

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22365-0
F +43 5574/22365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a(n) - A| < \varepsilon$

liegen alle $a(n) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ $n \geq n_\varepsilon$

$\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_\varepsilon : |a(n) - a(m)| < \varepsilon$

liegen $a(n)$ und $a(m)$ nah beieinander

liegen alle $a(n), a(m)$

Dann gibt es eine reelle Zahl A, sodass $a(n), a(m) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Konvergenz von $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

1) Def.

2) Rechenregeln für Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

3) Sandwich-Lemma und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

4) a monoton fallend, nach unten beschränkt, dann $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = \inf\{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$

Divergenz von $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

1) a ist unbeschränkt ($(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt für $\alpha > 0$)

2) a hat mehrere Häufungspunkte

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich

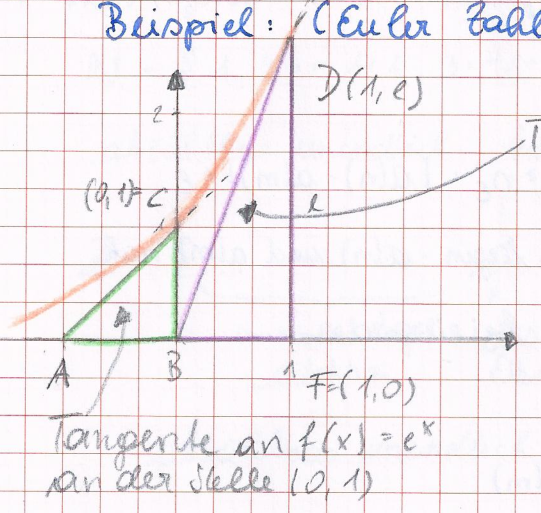
$\{\sqrt[n]{y}, y \in \mathbb{Q}, y > 0\}$ abzählbar unendlich

$\Rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\sqrt[n]{y}, y \in \mathbb{Q}, y > 0\}$ abzählbar unendlich

Welche andere reelle Zahlen gibt es? Wie kann man diese reelle Zahlen darstellen?

Reihen und reelle Zahlen

Beispiel: (Euler Zahl $e = 2.71\ldots$)



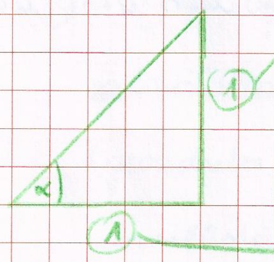
Tangente an $f(x) = e^x$ an der Stelle $(1, e)$

Geometrische Eigenschaft von

$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

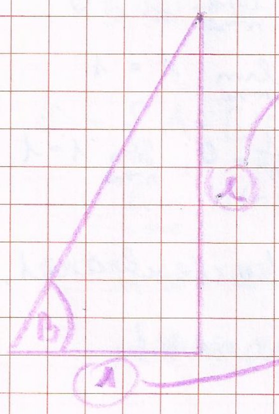
$|AB| = |BF| = 1$

(analog für andere Tangenten an $(x,0)$ $x \in \mathbb{R}$)



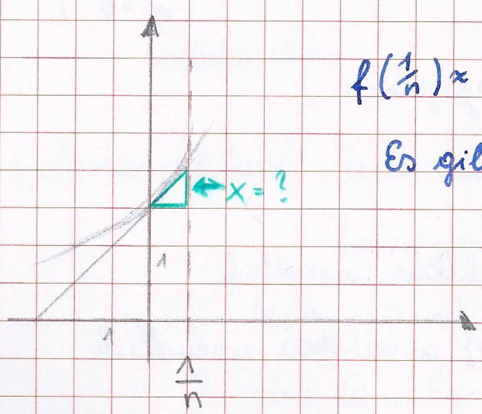
$f'(x) = e^x$

$\tan(\alpha) = f'(0) = 1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{1}$



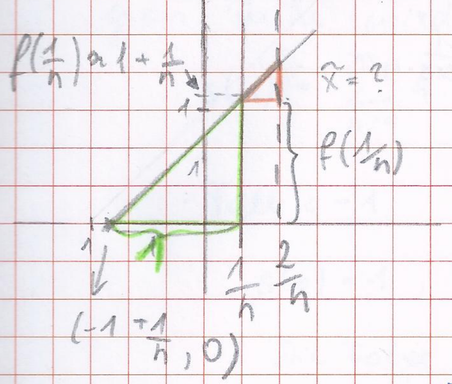
$\tan\beta = f'(1) = e = \frac{e}{1}$

Näherungen an e



$f\left(\frac{1}{n}\right) \approx 1 + x = 1 + \frac{1}{n}$

Es gilt $\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1} = \frac{x}{1}$, da diese Dreiecke ähnlich sind.



$$f\left(\tfrac{2}{n}\right) \approx f\left(\tfrac{1}{n}\right) + \tilde{x} = f\left(\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{n} \cdot f\left(\tfrac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1+\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)\left(1+\tfrac{1}{n}\right)$$

Es gilt $\dfrac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1} = \dfrac{\tilde{x}}{f(1/n)}$, denn .. ähnlich

$$\Rightarrow f\left(\tfrac{2}{n}\right) \approx \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow f(3/n) \approx \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{e = f(n/n = 1) \approx (1 + 1/n)^n}$$

$$f(1/n) \approx (1 + 1/n)$$

Konstruktion $\Rightarrow$ $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$

$n = 1: \quad e \approx 1 + 1 = 2$

$n = 2: \quad e \approx \left(1 + \tfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

$n = 3: \quad e \approx \left(1 + \tfrac{1}{3}\right)^3 = 2.\overline{370}$

$n = 4: \quad e \approx \left(1 + \tfrac{1}{4}\right)^4 = 2.441\ldots$

andere Möglichkeit: Binom. Lehrsatz

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(1/n\right)^k = \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{n \cdot \tfrac{1}{n}}_{k=1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2}}_{k=2} + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3}}_{k=3} + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 - 1/n}{2} + \frac{1 - 3/n + 2/n^2}{6} + \ldots$$

Vermutung: $(n \to \infty)$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

$e \approx 1 + 1 = 2 = s(1)$

$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5 = s(2)$

$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.\overline{6} = s(3)$

$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2.708\overline{3} = s(4)$

($\rightarrow$ diese Näherung ist besser)

Euler Zahl als eine Reihe (Folge von Partialsummen)

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{0} a(k) \quad \text{mit } \underbrace{a(0) = 1 = \frac{1}{0!}}$$

$$= \sum_{k=0}^{1} a(k) \quad \text{mit } a(1) = 1 = \frac{1}{1!}$$

$$= \sum_{k=0}^{2} a(k) \quad \text{mit } a(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

$$\vdots$$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} a(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Partialsumme von der Reihendarstellung von e.

Reihe ist eine reelle Zahl

$$\lim s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

konvergente Folge: $(a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, Grenzwert von $a)$

Reihe: $(a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, Grenzwert von $s)$

Beispiele: (geometrische Reihe u. Computerdarstellung von reellen Zahlen)

geom. Summe

$$(1-q)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k'=1}^{n+1} q^{k'} = \qquad (k' = k+1)$$

$$= q^0 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} q^k} - \cancel{\sum_{k'=1}^{n} q^{k'}} - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

Ratt GmbH
6850 Dornbirn, Welloch 1
T +43 5574/22365-0
F +43 5574/22365-6
office@rattpack.eu
www.rattpack.eu

geom. Reihe wird durch Partialsummen

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} q^k \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{R}$$

- Fall $q = 1$

  $s(0) = 1$, $s(1) = 1+1$, $s(2) = 1+1+1$, ...

  Die Folge $s = (s(n))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} = (n+1)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ist unbeschränkt, also s ist divergent.

  Man sagt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ divergiert, d.h.

  $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \notin \mathbb{R}$.